Kurvendiskussion

Definition:

Unter einer **Kurvendiskussion** versteht man die Untersuchung des Graphen einer Funktion im Hinblick auf seine geometrischen Eigenschaften.

Geometrische Eigenschaften:

- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (z.B. Nullstellen)
- Hoch- und Tiefpunkte (z.B. lokale Extremstellen)
- Wendepunkte und Wendetangenten
- Asymptoten
- Monotonie- und Krümmungsverhalten, etc.

Mit diesen Angaben (Punkten) kann dann eine ungefähre Skizze der Funktion angefertigt werden.

Die Kurvendiskussion ist ein Anwendungsgebiet der Differentialrechnung.

Definitionsbereich einer Funktion

Der Definitionsbereich einer Funktion ist die Menge der reellen Zahlen, die für die Variable x eingesetzt werden können.

Geometrisch sind es alle Zahlen der x-Achse (x-Werte), für die ein y-Wert berechnet werden kann.

Beispiele:

a) Lineare Funktion:

$f(x) = x + 3 \rightarrow$ Definitionsbereich $-\infty$ bis $+\infty$

Anmerkung: Lineare Funktionen sind in der gesamten Menge der reellen Zahlen definiert.

b) Quadratische Funktion:

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ → Definitionsbereich $-\infty$ bis $+\infty$

Anmerkung: Quadratische Funktionen sind in der gesamten Menge der reellen Zahlen definiert.

c) Quadratwurzelfunktion:

$f(x) = \sqrt{(x + 3)}$ → Definitionsbereich -3 bis $+\infty$

Anmerkung: Der Wert unter der Wurzel darf nicht negativ sein.

d) gebrochen rationale Funktion:

$f(x) = \frac{x + 4}{(x + 2)}$ → Definitionsbereich Menge der reellen Zahlen ohne - 2

Anmerkung: Die Division durch 0 ist nicht möglich.

Wertebereich einer Funktion

Der Wertebereich einer Funktion besteht aus der Menge der reellen Zahlen, die man beim Einsetzen der x-Werte erhält → f (x) bzw. y-Werte.

Beispiele:

a) Lineare Funktion:

$f(x) = x + 3$ → Wertebereich $-\infty$ bis $+\infty$

Anmerkung: Der Wertebereich einer linearen Funktion ist für die gesamte Menge der reellen Zahlen definiert.

b) Quadratische Funktion:

$f(x) = x^2 + 2x + 3 \rightarrow$ Wertebereich 2 bis $+\infty$

Anmerkung: Der y-Wert kann nicht kleiner werden wie y des Scheitelpunktes.

c) Quadratwurzelfunktion:

$f(x) = \sqrt{(x + 3)} \rightarrow$ Wertebereich 0 bis $+\infty$

Anmerkung: Der y-Wert einer Quadratwurzelfunktion kann nicht negativ sein.

d) gebrochen rationale Funktion:

$f(x) = \frac{x + 4}{(x + 2)} \rightarrow$ Wertebereich $-\infty$ bis $+\infty$

Anmerkung: Der Wertebereich einer gebrochen rationalen Funktion ist für die gesamte Menge der reellen Zahlen definiert.

Graph der Funktion:

Unter dem Graph einer Funktion verstehen wir die zeichnerische Darstellung im ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem, welches in vier Quadranten aufgeteilt ist.

Diese sind gegen den Uhrzeigersinn angeordnet und um umfassen folgende Werte für die einzuzeichnenden Punkte:

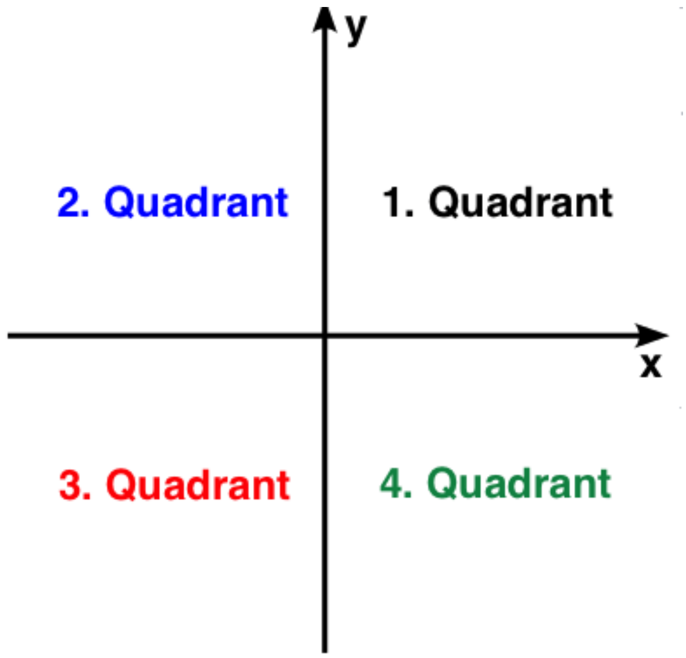
1. Quadrant: x-Werte positiv und y-Werte positiv z.B. (+3/+4)

2. Quadrant: x-Werte negativ und y-Werte positiv z.B. (-3/+4)

3. Quadrant: x-Werte negativ und y-Werte negativ z.B. (-3/-4)

4. Quadrant: x-Werte positiv und y-Werte negativ z.B. (+3/-4)

Kurvendiskussion



Um den Graphen der Funktion ohne Taschenrechner zu zeichnen, müssen zuerst ihre wichtigsten Stellen berechnet werden: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Asymptoten, etc.

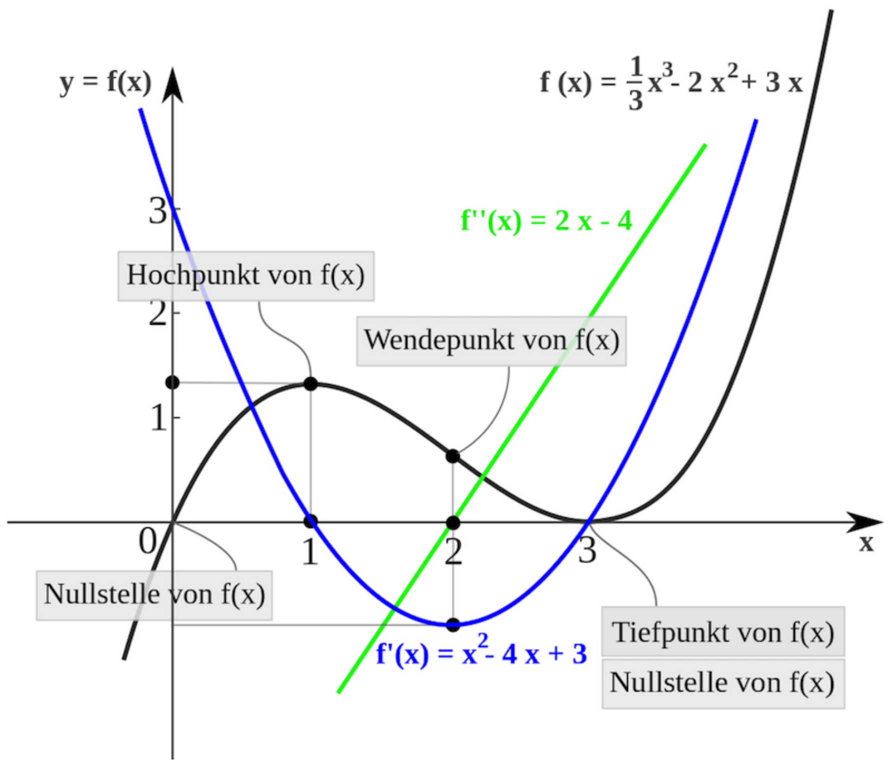


Abb. Wikipedia

Nullstellen:

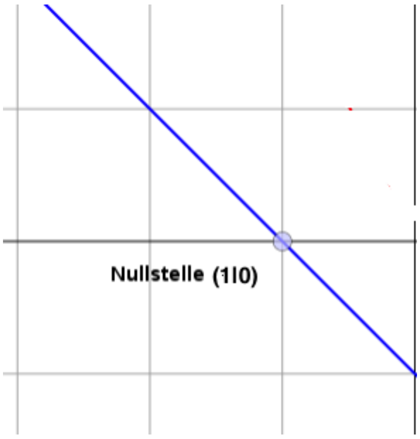
Unter Nullstellen versteht man Argumente (x-Werte), die eingesetzt in der Funktion den Funktionswert (y-Wert) null ergeben.

Bei reellen Funktionen sind das diejenigen Stellen an denen der Graph die x-Achse entweder berührt oder schneidet.

Wir unterscheiden folgende Möglichkeiten:

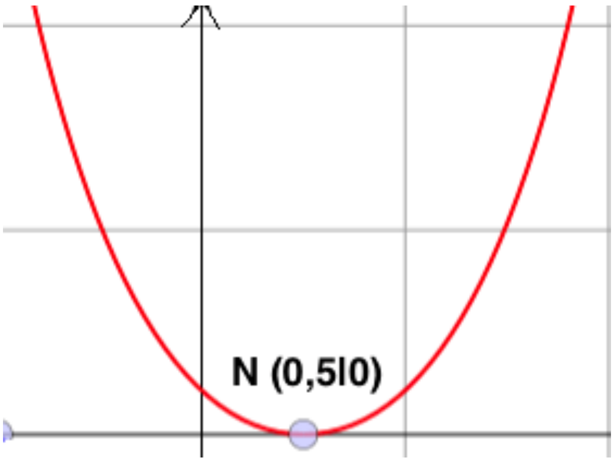
a) einfache Nullstelle

Vorkommen: lineare Funktionen



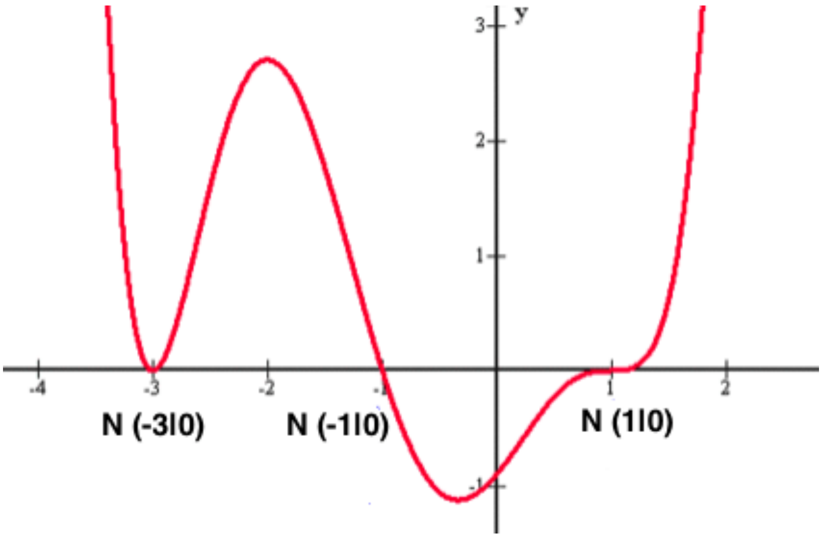
b) doppelte Nullstellen:

Vorkommen: quadratische Funktionen (Parabeln)



c) mehrfache Nullstellen:

Vorkommen: polynome Funktionen



Berechnung:

Man setzt die Funktion gleich 0 und löst die Gleichung nach x auf.

Berechnung: f (x) = 0

Methoden der Berechnung: pq-Formel, Herausheben, Mitternachtsformel, Horner-Schema, Newton-Verfahren etc.

Produkte werden in Faktoren aufgeteilt und diese werden jeweils gleich Null gesetzt.

Ist eine Nullstelle (x_0) bekannt, kann diese in eine Polynomdivision eingesetzt werden ($x - x_0$), um eine Gleichung zu erhalten, die um einen Grad niedriger ist. Damit können die restlichen Nullstellen besser bestimmt werden.

Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkte):

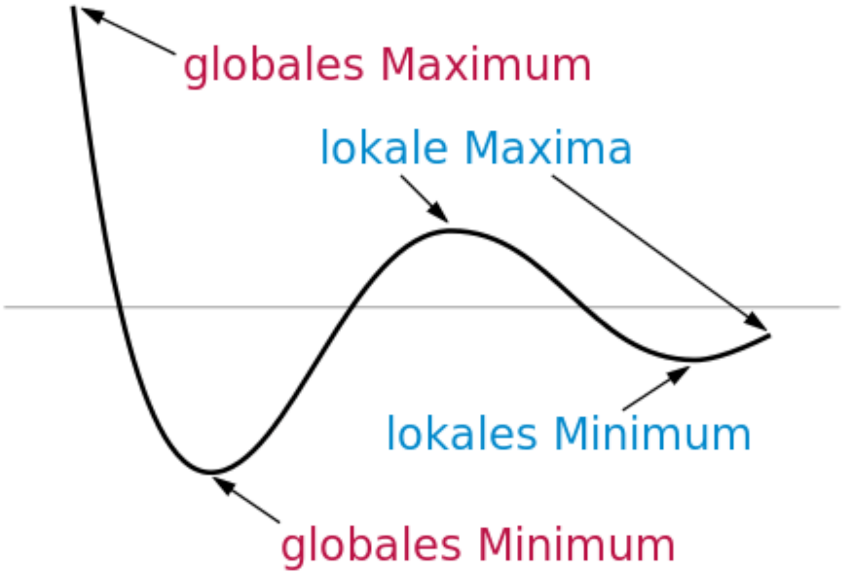


Abb. Wikipedia

Lokale Extremstellen:

Ein lokales Maximum/Minimum ist der Wert einer Funktion f (x) an einer Stelle (x), in deren Umgebung die Funktion keine größeren oder kleineren Werte annimmt.

Der Graph muss zudem an jedem relativen Extrempunkt eine waagrechte Tangente vorweisen.

In anderen Worten, die Steigung muss gleich null sein.

Berechnung:

Berechnung der x-Koordinate: $f'(x) = 0$

Berechnung der y-Koordinate: Der x-Wert wird in die Grundfunktion f (x) eingesetzt.

Überprüfung ob Hoch- oder Tiefpunkt:

Kurvendiskussion

Vorbemerkung: alle gefundenen Lösungen von f´ (0) werden als x_0 bezeichnet.

Der x-Wert wird in die 2. Ableitung eingesetzt und wenn $f''(x_0) \neq 0$ gilt.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ f hat bei x_0 einen Hochpunkt (lokales Maximum)

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f hat bei x_0 einen Tiefpunkt (lokales Minimum)

Globale Extremstellen:

Ein globales Maximum bzw. globales Minimum liegt hingegen vor, wenn beim Vergleich aller gefundenen Hoch- und Tiefpunkte jeweils das höchste und tiefste lokale Maximum definiert wird.

Vorzeichenwechsel:

Extrempunkte zeichnen sich auch dadurch aus, das sich hier das Vorzeichen beim Einsetzen des x-Wertes in die erste Ableitung vor und nach der Extremstelle ändert:

Hochpunkt = Vorzeichen vor der Extremstelle ein + und dahinter ein -

z.B.

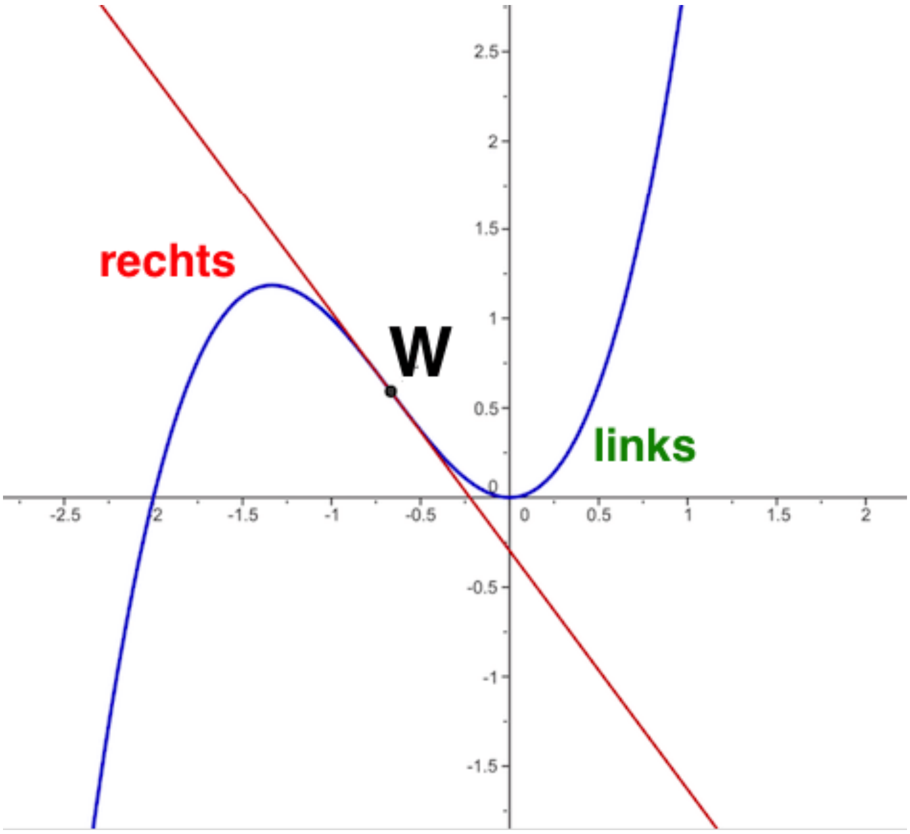
x	0,5	1	1,5
f '(x)	+	0	-

Tiefpunkt = Vorzeichen vor der Extremstelle ein - und dahinter ein +

x	0,5	1	1,5
f '(x)	-	0	+

Wendepunkte

Hier ändert die Funktion ihr Krümmungsverhalten. Und zwar von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung (siehe Abbildung), oder von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung.



Berechnung/Bestimmung:

1. Berechnung der 2. Ableitung $f''(x)$

2. Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen mit $f''(x) = 0$ ergibt Lösungen x_i

3. Berechnung der 3. Ableitung $f'''(x)$

4. Bestimmung ob Wendepunkt

Nullstellen der 2. Ableitung (x_i) werden in die 3. Ableitung eingesetzt

Bei $f'''(xi) \neq 0$ handelt es sich um Wendepunkte

Bei $f'''(xi) = 0$ handelt es sich um Wendepunkte, wenn sich bei f´´an der Stelle x_i das Vorzeichen ändert

5. Berechnung der y-Koordinate: Der x_i-Wert wird in die Grundfunktion f (x) eingesetzt.

Wendetangente:

Die Tangente an dem Wendepunkt P nennt man Wendetangente.

Hier handelt es sich also um eine Tangente im Wendepunkt des Graphen, die durch den Punkt P geht und die Steigung des Graphen im Punkt P hat.

Berechnung:

$y = k * x + d$

Die Variablen x und y entsprechen den Koordinaten des Wendepunkts.

Die Steigung k wird berechnet indem wir x-Koordinate des Wendepunkts in die 1. Ableitung $f'(x_W)$ einsetzen.

Die Variable d erhalten wir, indem wir die Tangentengleichung auf d umformen.

Beispiel:

$f'(x) = - {}^3/_4x^2 + 3x$, Wendepunkt W (2/4)

1. Schritt: Ermittlung der Steigung

Der x-Wert des Wendepunktes eingesetzt in die 1. Ableitung ergibt die Steigung der Tangente.

$f'(2) = 3 \Rightarrow$ Steigung k

2. Schritt: Ermittlung von d

$y = k*x + d$

$4 = 3 * 2 + d$ d.f. $d = -2$

3. Schritt: Aufstellung der Wendetangente

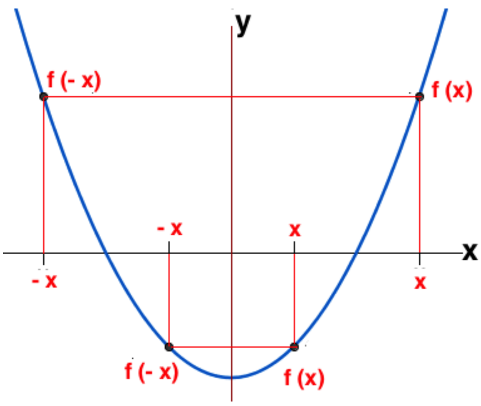
t_W: $y = 3x - 2$

Symmetrieverhalten:

Um zu entscheiden, ob der Graph einer Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist oder symmetrisch zum Ursprung ist, ersetzt man in der Funktionsgleichung die Variable x durch (-x) in der kompletten Gleichung.

Möglichkeit 1: f (x) = f (- x)

Erhält man das Ergebnis f (x) = f (- x), dann ist die gegebene Funktion symmetrisch zur y-Achse.

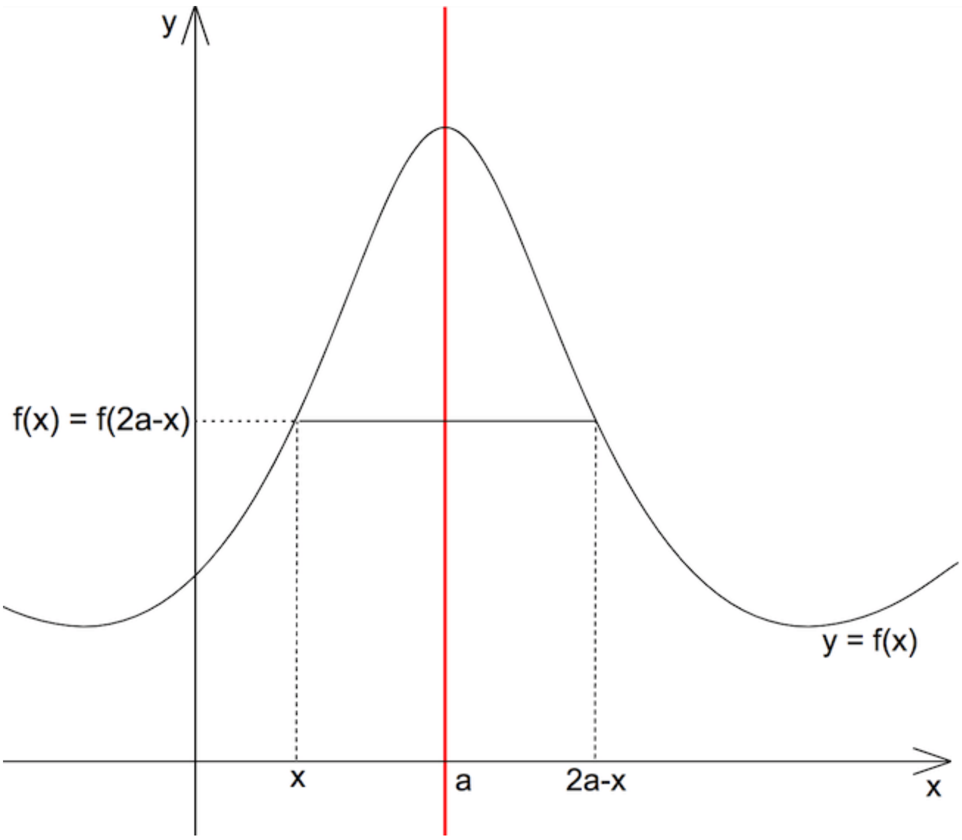


Allgemein - Symmetrie zur Geraden:

Der Graph einer Funktion f ist genau dann achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung x = a, wenn für alle x die Gleichung gilt

$f(a - x) = f(a + x)$

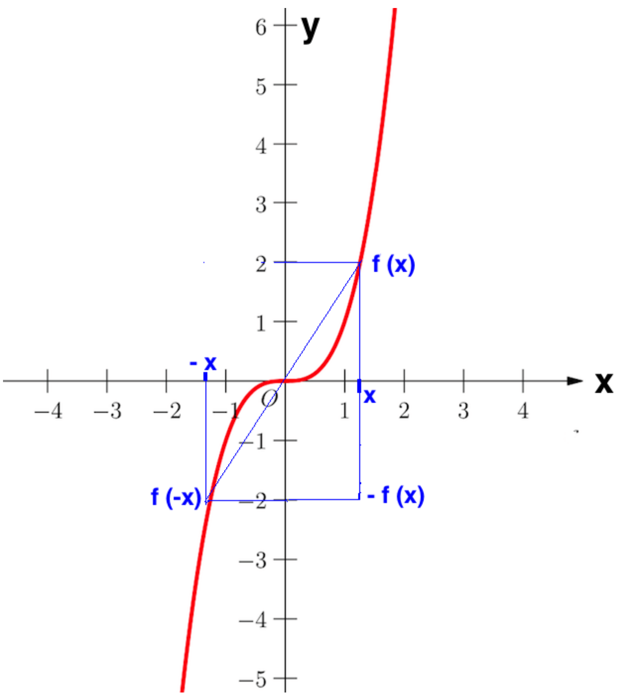
Durch Substitution von x mit x - a erhält man die äquivalente Bedingung $f(2a - x) = f(x)$



Möglichkeit 2: f (- x) = - f (x)

Erhält man das Ergebnis f (- x) = - f (x), dann ist die gegebene Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

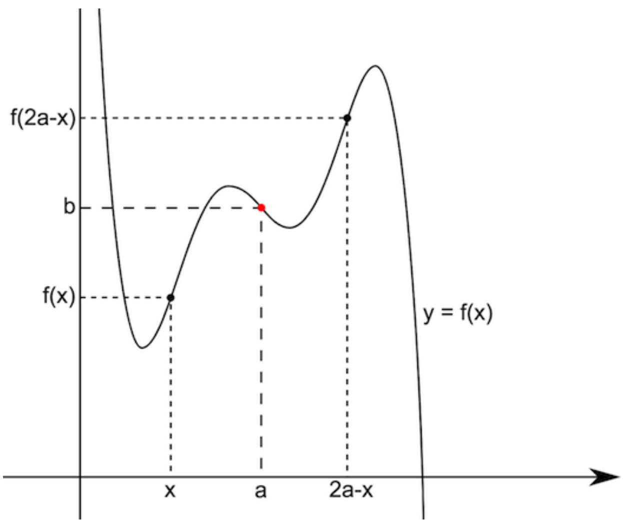
Kurvendiskussion



Allgemein - Symmetrie zum Punkt:

Der Graph einer Funktion f ist genau dann symmetrisch zum Punkt (a|b), wenn für alle x die Gleichung gilt

$f\,(a + x) - b = - f\,(a - x) + b$



Monotonieverhalten:

Definition:

Eine Funktion ist im Intervall I = [a;b] streng monoton steigend, wenn mit $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$.

In anderen Worten, den größer werdenden x-Werte entsprechen größer werdende Funktionswerte (y-Werte).

Eine Funktion ist im Intervall I = [a;b] streng monoton fallend, wenn mit $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

In anderen Worten, den größer werdenden x-Werte entsprechen kleiner werdende Funktionswerte (y-Werte).

Bestimmung:

Das Monotonieverhalten wird mithilfe der 1. Ableitung bestimmt.

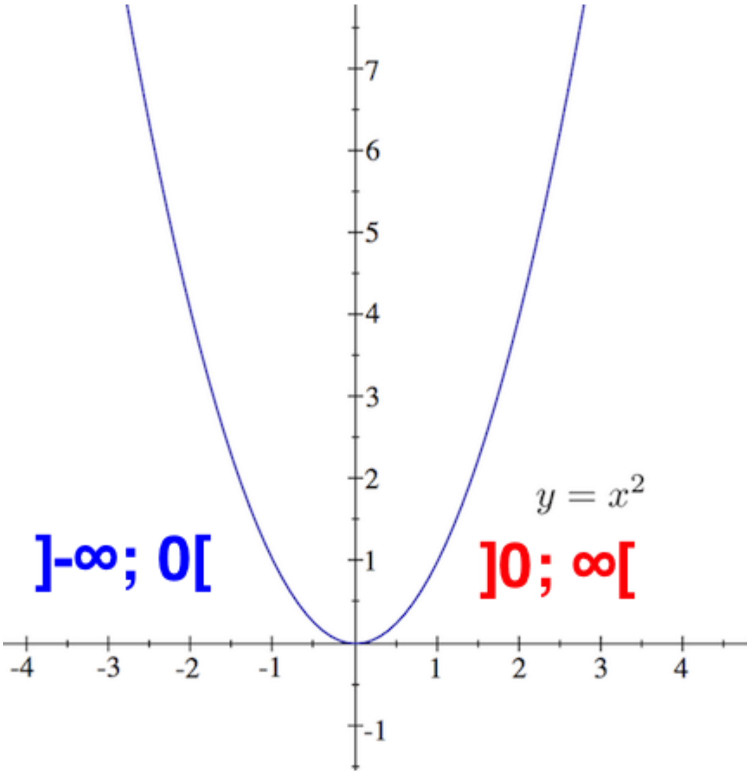
Es ändert sich in den relativen Extremstellen:

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ die Funktion f (x) ist in diesem Intervall streng monoton steigend.

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ die Funktion f (x) ist in diesem Intervall streng monoton fallend.

Beispiel:

Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^2$



Die Funktion f (x) = x^2 ist im Intervall

]-∞; 0 [streng monoton fallend, da f ´ (x) = 2x < 0 für x < 0

]0; ∞ [streng monoton steigend, da f ´ (x) = 2x > 0 für x > 0

Krümmungsverhalten:

Das Krümmungsverhalten einer Funktion wird mithilfe der 2. Ableitung bestimmt.

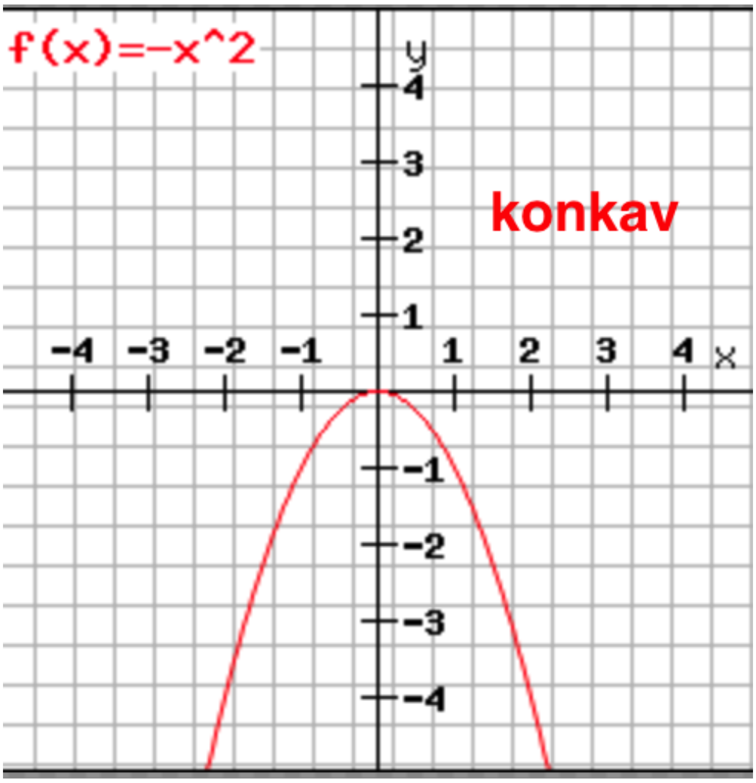
Mit Hilfe der zweiten Ableitung entscheiden wir, ob eine Funktion links- oder rechtsgekrümmt ist.

a) Rechtsgekrümmte Funktion:

Wenn die zweite Ableitung negativ ist, ist die Funktion rechtsgekrümmt.

f´´ (x) < 0 ⇒ die Funktion ist hier rechtsgekrümmt (konkav).

Sie dreht sich im Uhrzeigersinn.

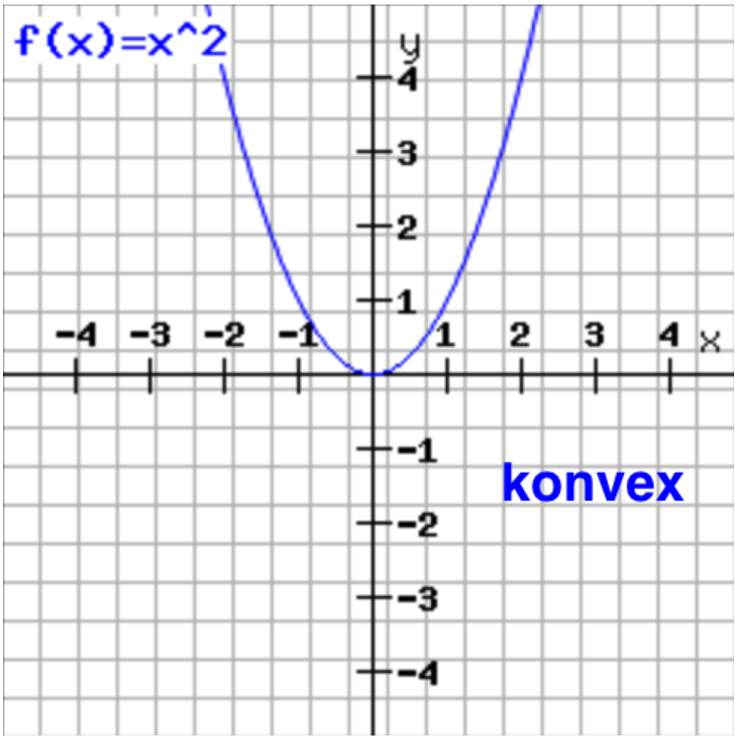


b) Linksgekrümmte Funktion:

b) Wenn die zweite Ableitung positiv ist, ist die Funktion linksgekrümmt.

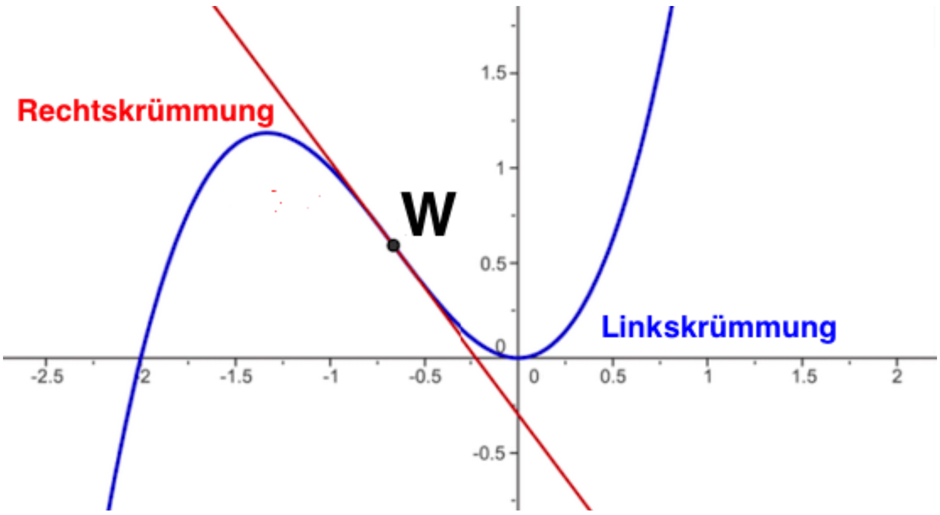
f´´ (x) > 0 ⇒ die Funktion ist hier linksgekrümmt (konvex)

Sie dreht sich gegen den Uhrzeigersinn.



c) Funktionen mit Links- und Rechtskrümmung:

Weist eine Funktion Wendepunkte auf, so gibt es Teile mit einer Rechtskrümmung und mit einer Linkskrümmung.



Hier ist die Funktion bis zum Wendepunkt (W) rechtsgekrümmt, nach dem Wendepunkt linksgekrümmt.