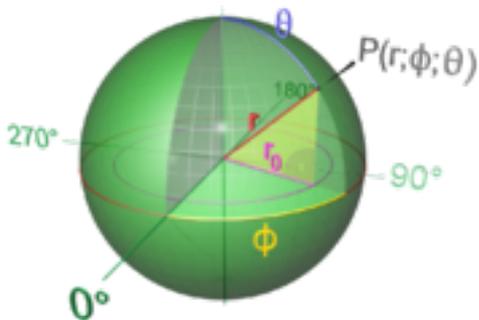


# ■ Gleichung der Kugel

## Definition:

---



Die Kugel wird definiert, als die Menge aller Punkte X des Raumes, die von einem gegebenen Punkt M (Mittelpunkt der Kugel) den **konstanten Abstand r** (Radius der Kugel) haben.

## Formel:

---

Eine Kugel wird folgendermaßen definiert:

$$k [M;r] = \{ X \mid XM = r \}$$

### Erklärung:

k = Kugel                      M = Mittelpunkt                      r = Radius der Kugel

X = alle Punkte                      XM = Strecke XM

## Kugelgleichung mit dem Mittelpunkt im Ursprung:

---

Wir unterscheiden in der Darstellung zwischen:

a) Koordinatenform:  $k: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

b) Vektorform:  $k: \vec{x}^2 = r^2$



## Kugelgleichung mit dem Mittelpunkt außerhalb des Ursprungs:

---

Wir unterscheiden in der Darstellung zwischen:

a) Koordinatenform:  $k: (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$

b) Vektorform:  $k: (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$

### Beispiel:

---

Gib die Gleichung des Kugel  $k \{M (+2/-1/+4) r = 3\}$  in Koordinatenform und Vektorform an und vereinfache diese Gleichungen.

#### Lösung:

##### 1. Koordinatenform:

$$k: (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 8z + 16 = 25$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 21 = 25 \quad / - 25$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 4 = 0$$

##### 2. Vektorenform:

$$k: (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$$

$$k: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \\ +4 \end{pmatrix}\right)^2 = 5^2 \quad \text{d.f.} \quad k: \vec{x}^2 - 2 * \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \\ +4 \end{pmatrix} \vec{x} + 21 = 25 / - 21$$

$$\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} +4 \\ -2 \\ +8 \end{pmatrix} \vec{x} - 4 = 0 \quad \text{NR:} \quad \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \\ +4 \end{pmatrix}^2 = (2 * 2 + (-1) * (-1) + 4 * 4) = 4 + 1 + 16 = 21$$