Dreiecke Überblick

Definition:

Ein Dreieck, auch Triangel genannt, ist eine **Figur** der ebenen Geometrie.

Es handelt sich hier um ein **Vieleck** (Polygon) mit drei Ecken und drei Seiten (Kanten). Die drei **Strecken** bilden die Seiten des Dreiecks.

Ein **Eckpunkt** ergibt sich, wenn zwei Seiten aufeinander stoßen.

Anders formuliert sind die Eckpunkte die **Scheitel** der Innenwinkel.

Damit ist das Dreieck die **einfachste** Figur in der Ebene, die von geraden Linien begrenzt wird.

Dreiecke spielen in der **Trigonometrie** eine herausragende Rolle.

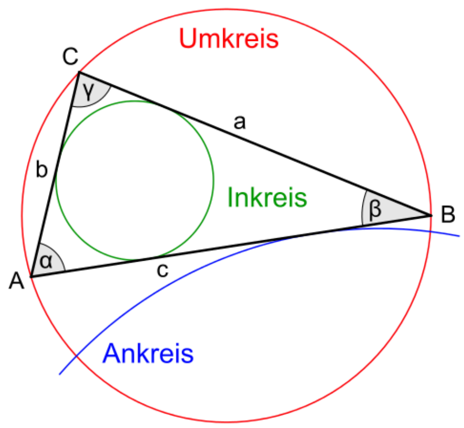


Abb. Wikipedia

Allgemeine Eigenschaften:

Dreiecke weisen folgende allgemeine Eigenschaften auf:

- **3 Innenwinkel**, die mit griechischen Buchstaben beschriftet werden - alpha (α), beta (β) und gamma (γ). Die Winkelsumme der Innenwinkel beträgt 180°

- **3 Seiten,** die mit Kleinbuchstaben beschriftet werden (a, b, c)

- **3 Eckpunkte**, die mit Großbuchstaben beschriftet werden (A, B, C)

Dreiecke Überblick

- **Dreiecksungleichung**: Die Gesamtlänge zweier Seiten eines Dreiecks (a + b) ist mindestens so groß wie die Länge der dritten Seite (c) d.f. $c \leq a + b$

- **4 merkwürdige Punkte**: Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, In- und Umkreismittelpunkt

Einteilung nach Symmetrieachsen:

a) drei Symmetrieachsen: gleichseitiges Dreieck

b) eine Symmetrieachse: gleichschenkliges Dreieck, gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck

c) keine Symmetrieachse: rechtwinkliges Dreieck, allgemeines Dreieck

Einteilung nach Seitenlängen

a) drei gleich lange Seiten: gleichseitiges Dreieck

b) zwei gleich lange Seiten: gleichschenkliges Dreieck, rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck

c) keine gleich langen Seiten: allgemeines Dreieck, rechtwinkliges Dreieck

Größe der Winkel:

a) drei gleich große Winkel: gleichseitiges Dreieck

b) zwei gleich große Winkel: gleichschenkliges Dreieck, rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck

c) keine gleich großen Winkel: allgemeines Dreieck, rechtwinkliges Dreieck

4 merkwürdigen Punkte:

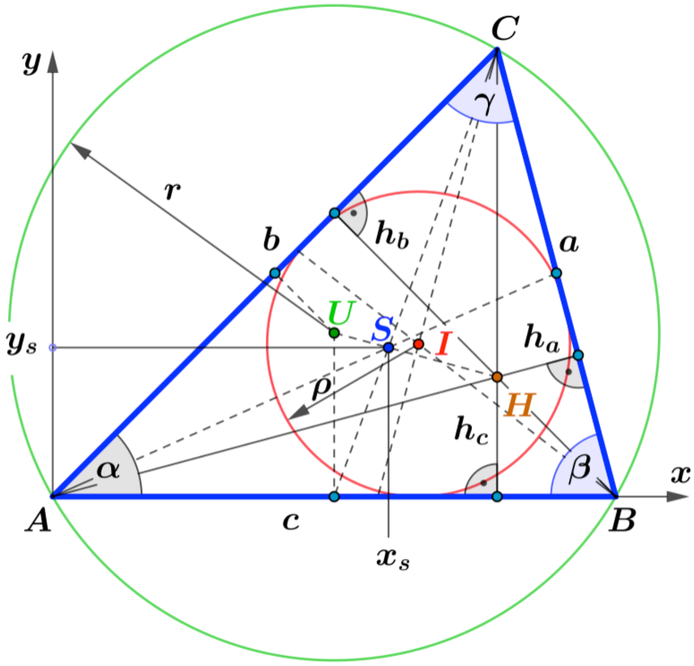


Abb. Wikipedia

a) Höhenschnittpunkt:

Der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks erhält man, wenn man von jeder Seite jeweils eine Linie im **rechten Winkel** durch den gegenüberliegende Eckpunkt zieht.

Die eingezeichneten Höhen brauchen wir für die Flächenberechnungen.

Bei einem spitzwinkligen Dreieck befindet sich der Höhenschnittpunkt **innerhalb** des Dreiecks.

Bei einem stumpfwinkligen Dreieck befindet er sich **außerhalb** des Dreiecks.

b) Umkreismittelpunkt:

Den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks erhalten wir, indem wir von allen drei Seiten die **Streckensymmetrale** bilden.

Der Umkreis verläuft durch alle drei **Eckpunkte** eines Dreiecks.

Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ist daher der **Schnittpunkt** der drei Streckensymmetralen.

c) Inkreismittelpunkt:

Den Inkreismittelpunkt eines Dreiecks erhalten wir, indem wir von allen drei Winkeln die **Winkelsymmetrale** bilden.

Der Inkreis berührt alle drei **Seiten** des Dreiecks von innen.

Der Inkreismittelpunkt ist daher der **Schnittpunkt** der drei Winkelsymmetralen.

d) Schwerpunkt:

Den Schwerpunkt eines Dreiecks erhalten wir, indem wir jeweils vom **Mittelpunkt** der gegenüberliegenden Strecke (Streckensymmetrale) eine Linie zum Eckpunkt ziehen.

Der Schwerpunkt teilt dabei die Seitenhalbierenden im Verhältnis **2 : 1**.

Die **Eulersche Gerade** verläuft durch den Schwerpunkt, den Umkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt.

Kongruenzsätze:

Die Kongruenzsätze liefern uns stets eindeutig lösbare Konstellationen von Dreiecken.

Ein Dreieck besteht aus drei Seiten und drei Innenwinkel.

Liegen drei Angaben in Form von Seiten (S) oder Winkel (W) vor, so ist dieses Dreieck eindeutig lösbar.

Wir unterscheiden folgende allgemeingültige Kongruenzsätze:

SSS = Seite - Seite - Seite

SWS = Seite - Winkel - Seite

WSW = Winkel - Seite - Winkel

Sinussatz und Kosinussatz:

Während die Winkelsätze (sin, tan und cos) jeweils nur beim rechtwinkligen Dreieck angewendet werden können, sind der Sinussatz und der Kosinussatz **allgemein-gültig** bei Dreiecken.

Der Kosinussatz ist zwar aufwändiger in der Berechnung, dafür ist er die einzige Möglichkeit bei Dreiecken ohne Winkelangaben einen **ersten Winkel** zu berechnen.

Formeln:

Der **Sinussatz** ist eine der wichtigsten Anwendungen in dem Bereich Trigonometrie Formeln.

Berechnung einer Seite:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2 * r$$

Berechnung eines Winkels:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = 2 * r$$

Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos \gamma$

Dreiecke Unterscheidung:

Wir können Dreiecke hinsichtlich ihrer Seiten oder ihrer Winkel unterscheiden:

a) Unterscheidung nach Winkeln:

- spitzwinkliges Dreieck (alle Winkel sind kleiner als 90°)

- stumpfwinkliges Dreieck (ein Winkel ist größer als 90°)

- rechtwinkliges Dreieck (ein Winkel ist genau 90°)

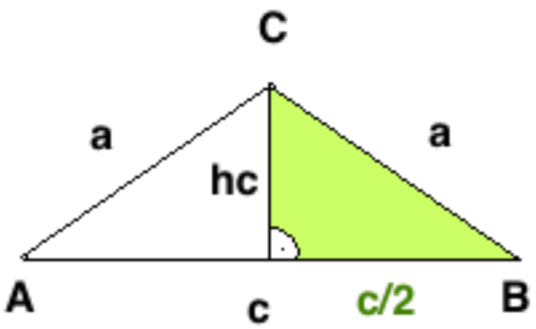
b) Unterscheidung nach Seiten:

- gleichschenkliges Dreieck (die beiden Schenkel sind gleich lang)
- gleichseitiges Dreieck (alle drei Seiten sind gleich lang)
- ungleichseitiges Dreieck

Gleichschenkliges Dreieck:

---

a) Skizze:



b) Formeln:

Flächeninhalt: $A = a * h_a : 2$

Flächeninhalt: $A = c * h_c : 2$

Umfang: $U = 2 * a + c$

Umkreisradius: $r = \frac{a^2}{2 * h_c}$

Inkreisradius: $\rho = \frac{c * (2a - c)}{4 * h_c}$

$a^2 = h_c^2 + (c/_2)^2$

$h_c^2 = a^2 - (c/_2)^2$

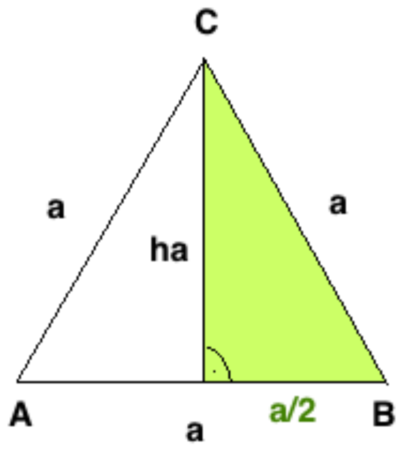
$(c/_2)^2 = a^2 - h_c^2$

c) Formbildende Eigenschaften:

- ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten
- die beiden Basiswinkel alpha (α) und beta (β) sind gleich groß
- die Höhe h_c halbiert die Basis c und den Winkel gamma (γ)
- das gleichschenklige Dreieck besitzt eine Symmetrieachse (Höhe hc)

Gleichseitiges Dreieck:

a) Skizze:



b) Formeln:

Flächeninhalt: $A = a^2 : 4 * \sqrt{3}$

oder Flächeninhalt: $A = a * h_a : 2$

Höhe: $h_a = a : 2 * \sqrt{3}$

Umfang: $U = 3 * a$

Inkreis $\rho = h_a * {}^{1}/_{3}$

Umkreis $r = h_a * {}^{2}/_{3}$

c) Formbildende Eigenschaften:

- bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang.

- die drei Innenwinkel betragen jeweils 60° ($\alpha = \beta = \gamma$).

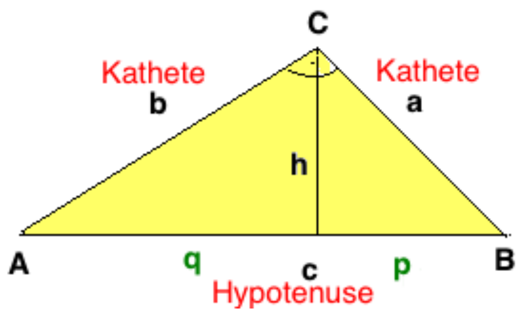
- das gleichseitige Dreieck verfügt über 3 Symmetrieachsen.

- jede Symmetrieachse teilt das gleichseitige Dreieck in jeweils zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.

- der Mittelpunkt teilt die ihn bildenden Strecken im Verhältnis 2 : 1.

Rechtwinkliges Dreieck:

a) Skizze:



b) Formeln:

Flächeninhalt: $A = a * b : 2$

Flächeninhalt mit hc: $A = c * h_c : 2$

Umfang: $U = a + b + c$

Umkreisradius: $r = c : 2$

Inkreisradius: $\rho = (a * b) : U$

Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Dreiecke Überblick

Hypotenuse $c^2 = a^2 + b^2$

Kathete $a^2 = c^2 - b^2$

Kathete $b^2 = c^2 - a^2$

Höhensatz: $h^2 = p * q$

Kathetensatz a: $a^2 = c * p$

Kathetensatz b: $b^2 = c * q$

Winkelsätze:

$\sin \alpha = GK / H = a / c$

$\cos \alpha = AK / H = b / c$

$\tan \alpha = GK / AK = a / b$

AK = Ankathete, GK = Gegenkathete, H = Hypotenuse

c) Formbildende Eigenschaften:

- ein rechtwinkliges Dreieck ist eine Fläche mit drei Seiten und drei Winkeln

- jeder Winkel im Halbkreisbogen ist ein rechter Winkel

- der Umkreismittelpunkt liegt im Halbierungspunkt der Seite c

- der Höhenschnittpunkt liegt im Scheitelpunkt des rechten Winkels

- der Schwerpunkt ist der Gleichgewichtspunkt des rechtwinkligen Dreiecks