Quadratische Gleichungen Lösungsformen

Übungsblatt ©www.mein-lernen.at

Definition:

Quadratische Gleichungen mit 1 Variablen haben die allgemeine Form **$ax^2 + bx + c = 0$** für die gilt: $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $\neq 0$

Eine quadratische Gleichung ist zudem eine Gleichung zweiten Grades, d.h. ihre Variable x kommt in keinem höheren Grad als in der zweiten Potenz vor.

Bestandteile:

Quadratische Gleichungen umfassen drei Glieder:

ax^2 = quadratisches Glied

bx = lineares Glied

c = konstantes Glied

Lösungsformen:

Folgende Lösungsformen können für quadratische Gleichungen je nach Ausgangslage angewandt werden.

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ Mitternachtsformel

$ax^2 + bx + c = 0$ und $a = +1 \Rightarrow$ pq-Formel

$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow$ Herausheben

$ax^2 + c = 0 \Rightarrow$ Wurzelziehen

$ax^2 = 0 \Rightarrow$ Lösung ist immer 0

Quadratische Gleichungen Lösungsformen

©www.mein-lernen.at

Mitternachtsformel:

Mit der Mitternachtsformel lösen wir allgemeine quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die **Diskriminante (b^2 - 4ac)** entscheidet über die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung:

a) $D > 0$ d.f. 2 Lösungen

$L = \{x_1; x_2\}$ da zwei Schnittpunkte mit der x-Achse

b) $D = 0$ d.f. 1 Lösung

$L = \{x\}$ da ein Berührungspunkt mit der x-Achse

c) $D < 0$ d.f. keine Lösung

$L = \{\ \}$ da kein Schnittpunkt mit der x-Achse

Beispiel:

gegeben: $6x^2 - 17x + 12 = 0$ Grundmenge = $\mathbb{R}$

gesucht: x_1, x_2

1. Schritt: Variablen definieren

a = + 6, b = - 17 und c = + 12

Quadratische Gleichungen Lösungsformen

©www.mein-lernen.at

2. Schritt: Mitternachtsformel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{+17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 * 6 * 12}}{2 * 6}$$

$$x = \frac{+17 \pm \sqrt{(289 - 288}}{12}$$

$$x = \frac{+17 \pm \sqrt{1}}{12}$$

$$x = \frac{+17 \pm 1}{12}$$

3. Schritt: Wir bestimmen x_1 und x_2:

x_1 = (+17 + 1) : 12

⇒ x_1 = 18/12

⇒ x_1 = +1,5

x_2 = (+17 - 1) : 12

⇒ x_1 = -16/22

⇒ x_2 = 4/3

L = {+4/3;+1,5}

pq-Formel:

Ist a = +1 spricht man von der **Normalform** einer quadratischen Gleichung.

Quadratische Gleichungen Lösungsformen

©www.mein-lernen.at

Hier kann die pq-Formel angewendet werden.

Mit der pq-Formel können wir Gleichungen nach dem Muster $x^2 + px + q = 0$ lösen.

$$x = -(\frac{p}{2}) \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

Die **Diskriminante $(p/2)^2 - q$** entscheidet über die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung

a) $D > 0$ d.f. 2 Lösungen

$L = \{x_1; x_2\}$ da zwei Schnittpunkte mit der x-Achse

b) $D = 0$ d.f. 1 Lösung

$L = \{x\}$ da ein Berührungspunkt mit der x-Achse

c) $D < 0$ d.f. keine Lösung

$L = \{ \}$ da kein Schnittpunkt mit der x-Achse

Beispiel:

$x^2 + 3x - 10 = 0$ Grundmenge = $\mathbb{R}$

gesucht: x_1, x_2

1. Schritt: Bestimmung von p und q

$p = +3$ $q = -10$

Quadratische Gleichungen Lösungsformen

©www.mein-lernen.at

2. Schritt: pq-Formel

$$x = -(\frac{p}{2}) \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$x = -(\frac{3}{2}) \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - (-10)}$$

$$x = -1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 10}$$

$$x = -1,5 \pm \sqrt{12,25}$$

$$x = -1,5 \pm 3,5$$

3. Schritt: Lösungsmenge bestimmen

x_1 = - 1,5 - 3,5 = - 5

x_2 = - 1,5 + 3,5 = + 2

L = { -5; +2}

Sonderfall $ax^2 + c = 0$:

Hier fehlt das lineare Glied bx.

Lösungsmethode: Wurzelziehen

Beispiel:

$2x^2 - 32 = 0$ / : 2

$x^2 - 16 = 0$ / + 16

$x^2 = 16$ / √

$x_{1,2}$ = +/- 4

Quadratische Gleichungen Lösungsformen

©www.mein-lernen.at

Sonderfall $ax^2 + bx = 0$:

Hier fehlt das konstante Glied c

Lösungsmethode: Herausheben

Beispiel:

$4x^2 - 8x = 0$

1. Schritt: Herausheben

$x * (4x - 8) = 0$

2. Schritt: In zwei Gleichungen "zerfällen"

$x = 0 \vee 4x - 8 = 0$

3. Schritt: 1. Gleichung

$x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

4. Schritt: 2. Gleichung

$4x - 8 = 0 \quad / + 8$

$4x = 8 \quad / : 4$

$x = 2 \Rightarrow x_2 = 2$

5. Schritt: Lösungsmenge bilden

$L = \{0; 2\}$